数理解析研究所講究録
1077 巻 1999 年 30-45

STRUCTURE OF GROUP C^*-ALGEBRAS OF LIE SEMI-DIRECT PRODUCTS $\mathbb{C}^n \rtimes \mathbb{R}$

須藤　隆洋 (SUDO TAKAHIRO)

琉球大学理学部

この講演内容は、次のとおりである。

(1) Motivation など

(2) 研究方法と具体例

(3) 主定理について

(4) 応用

まず C^*-群環の構造を調べることの motivation などについて説明する。次に具体的なリー半直積を例にとり、その C^*-群環の構造をあたえる。それから表題にあるとおり、リー半直積 $\mathbb{C}^n \rtimes \mathbb{R}$ の C^*-群環の構造について説明する。さらに、この結果が、リー半直積 $\mathbb{R}^n \rtimes \mathbb{R}$ の場合にも直接応用できることを示す。最後に、これらの C^*群環の stable rank と connected stable rank の計算への応用を述べる。

(1) MOTIVATION など

リー群 G に対して、その C^*-群環 $C^*(G)$ が対応する (cf.[Dx]). しかしながら、$C^*(G)$ は G の同型不変量ではない。

$$G \leftrightarrow C^*(G)$$

RIMS, 1998 年 9 月

ここで、$C^*(G)$ は、L^1 ノルムと合成積に関する、G 上の可積分関数全体のなす Banach $*$-環 $L^1(G)$ を universal 表現で表現して C*-completion をとった C*-環である。

また、G の既約ユニタリ表現の同値類のなす空間 $\hat{G}$ は、$C^*(G)$ の既約非退化$*$-表現の同値類のなす空間 $C^*(G)^\wedge$、すなわちスペクトルと位相同型である。

$$\hat{G} \approx C^*(G)^\wedge$$

この対応は、次の $L^1(G)$ の積分表現を経由してえられる。

$$\hat{G} \leftrightarrow L^1(G)^\wedge, \quad \pi \leftrightarrow \pi(f) = \int_G f(g)\pi_g dg, \quad g \in G, f \in L^1(G).$$

記号として、G の 1 次元規約ユニタリ表現全体のなす空間を $\hat{G}_1$ と書く。(4) 応用で、この空間の複素次元が、$C^*(G)$ の ranks と深く関係していることを示す。

例. G が $\mathbb{R}$ の場合。フーリエ変換を用いて、$C^*(G)$ は、無限遠で 0 になる $\mathbb{R}$ 上の連続関数全体のなす C*-環 $C_0(\mathbb{R})$ と同型になる。このとき、$\mathbb{R}$ の 1 次元既約ユニタリ表現と、$C_0(\mathbb{R})$ の極大イデアルが一対一に対応している。

$$\hat{\mathbb{R}} \ni \pi_p \Leftrightarrow C_0(\mathbb{R} \setminus \{p\}) \subset C_0(\mathbb{R})$$

ただし、$\pi_p : t \mapsto e^{itp}, t \in \mathbb{R}$.

この例のように、一般に $C^*(G)$ のイデアルを決定すること、あるいは (組成列の) 構造を決定することは、G の表現論と深く関係している。したがって、$C^*(G)$ の構造を決定することにより、これまで得られていなかった G の既約ユニタリ表現を作れる可能性もある。

ここで、リー群のクラスをいくつか上げておく。

I 型の群：コンパクト群、可換群、

連結巾零リー群、連結半単純リー群

I 型または non type I の群：連結可解リー群、離散群

任意の単連結可解リー群は、連続する $\mathbb{R}$ の半直積 $\mathbb{R} \rtimes \mathbb{R} \rtimes \cdots \rtimes \mathbb{R}$ の形をしている。また、群が non type I のときは、Dixmier の結果で互いに非同値な既約ユニタリ表現の同値類が連続無限個存在することが証明されている。従って、群の全ての既約ユニタリ表現を構成することは非常に困難である。非 I 型の典型例として、Mautner 群 $\mathbb{C}^2 \rtimes \mathbb{R}$ が知られている。

この講演では、実数群 $\mathbb{R}$ の複素ベクトル群 $\mathbb{C}^n$ 上の自己同型としての作用αがリー作用になっているリー半直積 $\mathbb{C}^n \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ の C^*-群環の構造について主に述べる。ここで、C^*-環の構造とは、C^*-環の組成列の構成と、その各剰余 C^*-環の構造のことを意味する。この意味で、C^*-環の構造に関する有名な結果として、C^*-環が I 型である必要十分条件は、C^*-環が適当な組成列を持ち、その各部分剰余 C^*-環が continuous trace を持つことである。これと類似の結果を $\mathbb{C}^n \rtimes \mathbb{R}$ の C*-群環の場合にあたえるのが、今回の話の中心である。

(2) 研究方法と具体例

ここで考えるリー半直積は、

$$G = \mathbb{C}^n \rtimes_\alpha \mathbb{R}.$$

ただし、αは、$\mathbb{R}$ の複素ベクトル群 $\mathbb{C}^n$ 上のリー作用で、写像

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \alpha_t \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

は可微分なリー群の準同型である。G の C*-群環 $C^*(G)$ は、G が半直積なので、次の C*-接合積 (変換 C*-群環) に同型である (cf.[Bl])。

$$C^*(G) \cong C^*(\mathbb{C}^n) \rtimes_\alpha \mathbb{R}.$$

さらに、$C^*(\mathbb{C}^n)$ から $C_0(\mathbb{C}^n)$ へのフーリエ変換をもちいて、この接合積は、次と同型になる。

$$C^*(\mathbb{C}^n) \rtimes_\alpha \mathbb{R} \cong C_0(\mathbb{C}^n) \rtimes_{\hat{\alpha}} \mathbb{R}.$$

ただし、$\hat{\alpha}$は、次で定義される $\mathbb{C}^n$上のリー作用である：

$$\langle \alpha_t(z)|w\rangle = \langle z|\hat{\alpha}_t(w)\rangle, \quad t \in \mathbb{R}, z, w \in \mathbb{C}^n$$

ここで、$\langle z|w\rangle = e^{i\mathrm{Re}(\sum z_i \bar{w}_i)}$, $z = (z_i), w = (w_i) \in \mathbb{C}^n$は、$\mathbb{C}^n$の character で、$\mathrm{Re}(\cdot)$ は実数部分である。

さらに、もし K_1 が $\mathbb{C}^n$の$\hat{\alpha}$-不変な閉集合とすると、次の完全列がえられる：

$$0 \to C_0(\mathbb{C}^n \setminus K_1) \rtimes \mathbb{R} \to C_0(\mathbb{C}^n) \rtimes_{\hat{\alpha}} \mathbb{R} \to C_0(K_1) \rtimes \mathbb{R} \to 0$$

さらに、K_2 が $\mathbb{C}^n \setminus K_1$の$\hat{\alpha}$-不変な閉集合とすると、次は完全になる：

$$0 \to C_0(\mathbb{C}^n \setminus (K_1 \cup K_2)) \rtimes \mathbb{R} \to C_0(\mathbb{C}^n \setminus K_1) \rtimes_{\hat{\alpha}} \mathbb{R} \to C_0(K_2) \rtimes \mathbb{R} \to 0$$

帰納的に、$\mathbb{C}^n$の互いに素な$\hat{\alpha}$-不変な部分空間の列：

$$K_1, K_2, \cdots$$

と $C^*(G)$ の部分剰余 C*-環の列が対応する：

$$C_0(K_1) \rtimes \mathbb{R}, C_0(K_2) \rtimes \mathbb{R}, \cdots,$$

このような $\mathbb{C}^n$の部分空間の列 $\{K_j\}$ と、それに対応する各変換 C*-群環 $C_0(K_j) \rtimes_{\hat{\alpha}} \mathbb{R}$ の構造がわかれば、元の $C^*(G)$ の構造がわかったことになる。

例 **2.1.** $G=\mathbb{C}\rtimes_\alpha\mathbb{R}$ の場合を考える。このとき、作用αは次のタイプにわかれる：

(1) Trivial の場合：$\alpha_t(z)=z,\ t\in\mathbb{R},\ z\in\mathbb{C}$.

(2) 放射的の場合：$\alpha_t(z)=e^{\mu t}z,\ \mu\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

(3) 螺旋的の場合：$\alpha_t(z)=e^{(\mu+i\theta)t}z,\ \mu,\theta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

(4) 回転の場合：$\alpha_t(z)=e^{i\theta t}z,\ \theta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$\alpha_t=e^{(\mu+i\theta)t}$は $\mathbb{C}$ の乗法群 $\mathbb{C}^\times$ の元で、α_tの $t=0$ での微分は、$\frac{d\alpha}{dt}|_{t=0}=\mu+i\theta$.

さらに、$C^*(G)$ の構造を考えるときは、$\mu=1=\theta$としてよい。実際に、上の各場合に対応して、次の完全列がえられる：

$$\begin{aligned}
(1)\quad & C^*(G)\cong C_0(\mathbb{C}\times\mathbb{R}),\\
(2),(3)\quad & 0\to C(\mathbb{T})\otimes\mathbb{K}\to C^*(G)\to C_0(\mathbb{R})\to 0\\
(4)\quad & 0\to C_0(\mathbb{C}\setminus\{0\})\otimes\mathbb{K}\to C^*(G)\to C_0(\mathbb{R})\to 0.
\end{aligned}$$

ただし、$\mathbb{K}$ は、可算無限ヒルベルト空間上のコンパクト作用素の全体のなす C*-環である。

上の理由を簡単に説明する。(2), (3), (4) の場合では、$\mathbb{C}$ の原点が、閉集合かつ$\hat{\alpha}$の不動点になっているので、次の完全列がえられる：

$$0\to C_0(\mathbb{C}\setminus\{0\})\rtimes\mathbb{R}\to C_0(\mathbb{C})\rtimes_{\hat{\alpha}}\mathbb{R}\to C_0(\mathbb{R})\to 0$$

さらに、(2), (3) の場合は、作用αが $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ で自由で、さらに wandering, つまり、$\mathbb{C}\setminus\{0\}$ の任意のコンパクト集合 K に対して、集合 $\{t\in\mathbb{R}\,|\,\alpha_t(K)\cap K\neq\emptyset\}$ が $\mathbb{R}$ で相対コンパクトになっているので、Green の結果 [Gr1] より、次の同型がえられる：

$$C_0(\mathbb{C}\setminus\{0\})\rtimes\mathbb{R}\cong C(\mathbb{C}\setminus\{0\}/\mathbb{R})\otimes\mathbb{K}\cong C(\mathbb{T})\otimes\mathbb{K}.$$

ただし、$\mathbb{C}\setminus\{0\}/\mathbb{R}$ は、$\mathbb{R}$ による $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ の軌道空間で、トーラス $\mathbb{T}$ に位相同型である。

(4) の場合は、作用$\hat{\alpha}$が回転であることより、

$$C_0(\mathbb{C}\setminus\{0\}) \rtimes \mathbb{R} \cong C_0(\mathbb{R}) \otimes (C(\mathbb{T}) \rtimes \mathbb{R}).$$

さらに、作用$\hat{\alpha}$が $\mathbb{T}$ 上推移的であることと、C*-群環に関する Green の imprimitivity 定理 [Gr2] を用いて、

$$C(\mathbb{T}) \rtimes \mathbb{R} \cong C(O(z)) \rtimes \mathbb{R} \cong C(\mathbb{R}/\mathbb{R}_z) \rtimes \mathbb{R}$$
$$\cong C^*(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{K}(L^2(\mathbb{T})) \cong C(\mathbb{T}) \otimes \mathbb{K}.$$

ただし、$O(z)$ は、$z \in \mathbb{T}$ の$\hat{\alpha}$による軌道で、$\mathbb{R}_z$は z の$\hat{\alpha}$に関する固定群である。また、注として、$C_0(\mathbb{R}) \otimes C(\mathbb{T}) \cong C_0(\mathbb{C}\setminus\{0\})$.

上の議論は、さらに一般のリー半直積 $G = \mathbb{C}^n \rtimes \mathbb{R}$ の場合に一部応用が効く。すなわち、G が I 型になる場合と、そうでない場合の $C^*(G)$ の I 型部分剰余 C*-環の構造が解析できる。また、後で述べる主定理からは、$C^*(G)$ が I 型であることと、CCR であること、すなわち軌道空間 $\mathbb{C}^n/\mathbb{R}$ が T_1空間になっていることが同値であることがわかる。

例 **2.2.** 次に G が non type I になる場合の典型的な例として、Mautner 群 $G = \mathbb{C}^2 \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ を考える。ただし、

$$\alpha_t(z_1, z_2) = (e^{it}z_1, e^{i\theta t}z_2), \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.$$

フーリエ変換を用いて、$C^*(G) \cong C_0(\mathbb{C}^2) \rtimes_{\hat{\alpha}} \mathbb{R}$. 次に $\mathbb{C}^2$の原点 0_2が、$\mathbb{C}^2$の閉集合で、$\hat{\alpha}$の不動点になっているので、次の完全列がえられる：

$$0 \to C_0(\mathbb{C}^2\setminus\{0_2\}) \rtimes \mathbb{R} \to C^*(G) \to C_0(\mathbb{R}) \to 0.$$

さらに、$(\mathbb{C}\setminus\{0\}) \times \{0\}$, $\{0\} \times (\mathbb{C}\setminus\{0\})$ が、$\mathbb{C}^2\setminus\{0_2\}$ の互いに素な$\hat{\alpha}$-不変な閉集合であるので、

$$0 \to C_0((\mathbb{C}\setminus\{0\})^2) \rtimes \mathbb{R} \to C_0(\mathbb{C}^2\setminus\{0_2\}) \rtimes \mathbb{R} \to \oplus^2 C_0(\mathbb{C}\setminus\{0\}) \rtimes \mathbb{R} \to 0.$$

また、$\mathbb{R}$ の $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上の作用は回転なので、例 2.1 より、

$$C_0(\mathbb{C}\setminus\{0\})\rtimes\mathbb{R}\cong C_0(\mathbb{C}\setminus\{0\})\otimes\mathbb{K}.$$

$\hat{\alpha}$は $(\mathbb{C}\setminus\{0\})^2$上多重回転になっているので、

$$C_0((\mathbb{C}\setminus\{0\})^2)\rtimes\mathbb{R}\cong C_0(\mathbb{R}_+^2)\otimes(C(\mathbb{T}^2)\rtimes\mathbb{R}).$$

さらに、$\hat{\alpha}$は $\mathbb{T}^2$上自由に作用していて、$\mathbb{T}^2$は葉層構造 (Kronecker folitaion) をもっているので、$C(\mathbb{T}^2)\rtimes\mathbb{R}$ は葉層 C*-環になっていることがわかる (cf.[Cn], [MS]). このとき、次がわかる：

$$C(\mathbb{T}^2)\rtimes\mathbb{R}\cong(C(\mathbb{T})\rtimes\mathbb{Z})\otimes\mathbb{K}=\mathfrak{A}_\theta\otimes\mathbb{K}.$$

ただし、$\mathfrak{A}_\theta$は非可換トーラス。

(3) 主定理について

ここでは、一般の場合、$G=\mathbb{C}^n\rtimes_\alpha\mathbb{R}$ を考える。まず最初に次の図式が可換であることに注意する。

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \xrightarrow{\alpha} & \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \quad t\mapsto\alpha_t \\ \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \exp} \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\mathrm{d}\alpha} & \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \quad t\mapsto td\alpha\end{array}$$

すなわち、$\alpha_t=\exp(td\alpha)$. $\mathbb{C}^n$の適当な基底をとることにより、dαの Jordan 標準形がえられ、この基底を $\mathbb{C}^n$の標準基底とみなすと次の対角和に等しい：

$$\mathrm{d}\alpha=\begin{pmatrix}0&&\\&\ddots&\\&&0\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}\lambda_{11}&&0\\&\ddots&\\0&&\lambda_{1n_1}\end{pmatrix}\oplus\left(\oplus_{i=2}^{l}\begin{pmatrix}\lambda_i&&&0\\1&\ddots&&\\&\ddots&\ddots&\\0&&1&\lambda_i\end{pmatrix}\right)$$

ただし、λ_{1k} $(1\leq k\leq n_1)$, λ_i $(2\leq i\leq l)$ は $d\alpha$の固有値。このとき、

$$\hat{\alpha}_t=\begin{pmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}e^{t\overline{\lambda_{11}}}&&0\\&\ddots&\\0&&e^{t\overline{\lambda_{1n_1}}}\end{pmatrix}\oplus\left(\oplus_{i=2}^{l}e^{t\overline{\lambda_i}}\begin{pmatrix}1&t&&*\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&t\\0&&&1\end{pmatrix}\right)$$

一般の場合は、上の形の作用を解析することになるが、その変換 C*-群環の構造を考える上では、以下の二つの特殊な、対角と非対角の場合の解析が本質的であることがわかる。

対角の場合.

まず最初に、$\mathbb{C}^n$上で$\hat{\alpha}$が対角の場合。すなわち、

$$\mathrm{d}\alpha = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \hat{\alpha}_t = \begin{pmatrix} e^{t\overline{\lambda_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\overline{\lambda_n}} \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 0$ のときは、

$$C_0(\mathbb{C}^n) \rtimes \mathbb{R} \cong C_0(\mathbb{C}) \otimes (C_0(\mathbb{C}^{n-1}) \rtimes \mathbb{R}).$$

従って、すべての i に対して、$\lambda_i \neq 0$ とする。

$\hat{\alpha}$不変な開部分空間 $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$への$\hat{\alpha}$の制限に対応する接合積 $C_0((\mathbb{C} \setminus \{0\})^n) \rtimes_{\hat{\alpha}} \mathbb{R}$ の解析が本質的なので、以下で、$\mathrm{d}\alpha$の固有値λ_iが全て純虚数の場合と、そうでない場合にわけて考察する。

λ_iが全て純虚数の場合は、$\hat{\alpha}$が各直和因子の半径方向には作用していないので、

$$C_0((\mathbb{C} \setminus \{0\})^n) \rtimes \mathbb{R} \cong C_0(\mathbb{R}^n_+) \otimes (C(\mathbb{T}^n) \rtimes \mathbb{R}).$$

このとき、$C(\mathbb{T}^n) \rtimes \mathbb{R}$ は foliation C*-環とみなせて、次がなりたつ ([MS])：

$$C(\mathbb{T}^n) \rtimes \mathbb{R} \cong (C(\mathbb{T}^{n-1}) \rtimes \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{K}$$

ここで、$C(\mathbb{T}^{n-1}) \rtimes \mathbb{Z} \equiv \mathfrak{A}_\Theta$は、高次元非可換トーラスである (cf.[Rf2]). ここで、$\overline{\lambda_i} = i\theta_i$ として、θ_iが $\mathbb{Q}$ 上独立な場合と、そうでない場合にわける。

θ_iが $\mathbb{Q}$ 上独立な場合：このとき、高次元非可換トーラス $\mathfrak{A}_\Theta$は単純で、Elliott と Q. Lin の結果 [EL] により、$A\mathbb{T}$-環になっている。

θ_iが $\mathbb{Q}$ 上独立でない場合：このとき、作用の形から、ある自然数 p に対して、次の完全列がえられる ([Bl])：

$$0 \to C_0(\mathbb{R}) \otimes (C(\mathbb{T}^n) \rtimes \mathbb{Z}_p) \to C(\mathbb{T}^n) \rtimes \mathbb{Z} \to C(\mathbb{T}^n) \rtimes \mathbb{Z}_p \to 0$$

非対角の場合.

次に、$\hat{\alpha}$が $\mathbb{C}^n$上で非対角の場合を考える。すなわち、

$$d\alpha = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{pmatrix} \quad \hat{\alpha}_t = e^{t\bar{\lambda}} \begin{pmatrix} 1 & t & & * \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & t \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

λが non zero かつ純虚数でない場合は、$\mathbb{C}^n$の$\hat{\alpha}$不変な開部分空間 $\mathbb{C}^{n-1} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\})$ への$\hat{\alpha}$の制限に対応する接合積の解析が本質的で、制限した$\hat{\alpha}$は自由かつ wandering になっているので、Green の結果 [Gr1] を用い、かつ$\hat{\alpha}$の軌道を解析して、次がいえる：

$$\begin{aligned} C_0(\mathbb{C}^{n-1} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\})) \rtimes_{\hat{\alpha}} \mathbb{R} &\cong C_0((\mathbb{C}^{n-1} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\}))/\mathbb{R}) \otimes \mathbb{K} \\ &\cong C_0(\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{T}) \otimes \mathbb{K}. \end{aligned}$$

λが zero または純虚数の場合は、$\mathbb{C}^n$上の$\hat{\alpha}$-不変な開部分空間 $\mathbb{C}^{n-1} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\})$ への$\hat{\alpha}$の制限に対応する接合積の解析が本質的で、制限した$\hat{\alpha}$は自由かつ wandering であるので、Green の結果を用い、かつ$\hat{\alpha}$の軌道を解析することにより、次がなりたつ：

$$\begin{aligned} C_0(\mathbb{C}^{n-1} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\})) \rtimes \mathbb{R} &\cong C_0((\mathbb{C}^{n-1} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\}))/\mathbb{R}) \otimes \mathbb{K} \\ &\cong C_0(\mathbb{C}^{n-2} \times \mathbb{R} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\})) \otimes \mathbb{K} \end{aligned}$$

以上の議論をさらに組み合わせることにより、次がえられる：

主定理. $G=\mathbb{C}^n \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ をリー半直積とすると、$C^*(G)$ の有限組成列 $\{\mathfrak{I}_j\}_{j=1}^K$が存在して、各 *subquotient* $\mathfrak{I}_j/\mathfrak{I}_{j-1}$は次に同型である。

$$
\mathfrak{I}_j/\mathfrak{I}_{j-1} \cong \begin{cases} C_0(\mathbb{C}^{n_0+u}\times\mathbb{R}) = C_0(\hat{G}_1) & j{=}K, \\ C_0(\mathbb{C}^{n_0+s_j}\times(\mathbb{C}\setminus\{0\})^{t_j}\times\mathbb{T})\otimes\mathbb{K} & or \\ C_0(\mathbb{C}^{n_0+s_j}\times(\mathbb{C}\setminus\{0\})^{t_j}\times\mathbb{R})\otimes\mathbb{K} & or \\ C_0(\mathbb{C}^{n_0+s_j}\times\mathbb{R}_+^{u_j})\otimes\mathfrak{A}_{\Theta(i_2,\cdots,i_{u_j})}\otimes\mathbb{K} & for\ 1\le j\le K-1, \end{cases}
$$
$$
0\le n_0\le n, \qquad 0\le s_j, t_j\le n-n_0,
$$
$$
2\le u_j\le n-n_0, \quad s_j+t_j+1\le n-n_0, \quad s_j+u_j\le n-n_0.
$$

ただし、n_0は $d\alpha$の *zero* ジョルダンブロックの数で、u は $d\alpha$の *zero* 固有値に対応するジョルダンブロックの数。二番目の場合は、$\mathbb{C}^n$のある$\hat{\alpha}$不変部分空間上で $d\alpha$のある固有値が *nonzero* かつ純虚数でないとき、三番目の場合は、$\mathbb{C}^n$のある$\hat{\alpha}$不変部分空間上で $d\alpha$の全ての固有値が *zero* または、純虚数だが$\hat{\alpha}$が回転的でないとき。四番目はある $\mathbb{C}^n$の$\hat{\alpha}$不変部分空間上で回転的であるとき。$\Theta=(i_1,\cdots,i_{u_j})$ として、$\mathfrak{A}_{\Theta(i_2,\cdots,i_{u_j})}=C(\mathbb{T}^{u_j})\rtimes_\Theta\mathbb{Z}$, は高次元非可換トーラス。

定理の系として、次がすぐにわかる：

系. リー半直積 $G=\mathbb{R}^n\rtimes\mathbb{R}$ に対して、$C^*(G)$ の有限組成列 $\{\mathfrak{D}_j\}$ が存在して、

$$
\mathfrak{D}_j/\mathfrak{D}_{j-1} \cong \begin{cases} C_0(\mathbb{R}^{n'+1}) = C_0(\hat{G}_1) & j=K, \\ C_0(\Omega_j)\otimes\mathbb{K} & or \\ C_0(\Omega'_j)\otimes\mathfrak{A}_{\Theta(i_2,\cdots,i_{u_j})}\otimes\mathbb{K} & or \\ C_0(\Omega'_j)\otimes\mathfrak{B}_j\otimes\mathbb{K} & for\ 1\le j\le K-1 \end{cases}
$$
$$
0\le n'\le n, \quad 0\le s_j,t_j\le n-n',
$$
$$
1\le u_j\le n-n', \quad s_j+t_j+1, s_j+u_j\le n-n'.
$$

ただし、Ω_jは、$\mathbb{C}^{n'+s_j}\times(\mathbb{C}\setminus\{0\})^{t_j}\times\mathbb{R}$ または、$\mathbb{C}^{n'+s_j}\times(\mathbb{C}\setminus\{0\})^{t_j}\times\mathbb{R}$ のある閉部分空間で、$0\le s_j,t_j\le n-n'$かつ $s_j+t_j+1\le n-n'$で、Ω'_jは $\mathbb{C}^{n'+s_j}\times\mathbb{R}_+^{u_j}$のある閉部

分空間で、$2 \leq u_j \leq n - n'$かつ $s_j + u_j \leq n - n'$. $\mathfrak{A}_{\Theta(i_2,\cdots,i_{u_j})}$は単純で、それが単純でないとき、$\mathfrak{B}_j$はそれ自身か、その *quotient* を意味する。

略証. $\tilde{G} = \mathbb{C}^n \rtimes_{\tilde{\alpha}} \mathbb{R}$, $\tilde{\alpha}_t(x + iy) = \alpha_t(x) + i\alpha_t(y)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$とする。このとき、実数部分 $\mathbb{R}^n$は$\tilde{\alpha}$不変で、$\mathbb{C}^n$で閉であるから、次の完全系列が得られる：

$$0 \to C_0(\mathbb{C}^n \setminus \mathbb{R}^n) \rtimes_{\tilde{\alpha}^\wedge} \mathbb{R} \to C^*(\tilde{G}) \to C^*(G) \to 0$$

$C^*(\tilde{G})$ の構造は主定理によりわかっているので、それをイデアルとからめて、$C^*(G)$ の構造を得ることができる。 $\square$

注. ここで、上の主定理とその系と、他の人の結果との位置関係を見ることにする。

• まず最初に、Z'ep [Zp] は、(proper) $ax + b$-group, $G = \mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}$ の場合を考察している。

次に、Rosenberg [Rs] は、$G = \mathbb{R}^2 \rtimes \mathbb{R}$ (3 次元以下の単連結可解リー群全て) の場合と、$G = \mathbb{R}^n \rtimes_\alpha \mathbb{R}$, $\alpha_t(x_i) = (e^t x_i)$ の場合を考察している。

さらに、Wang [Wg] は、$G = \mathbb{R}^n \rtimes_\alpha \mathbb{R}$, $\alpha_t(x_i) = (e^{ts_i} x_i)$, $s_i \in \mathbb{R}$ の場合に、Foliation C*-環のテクニックを駆使して $C^*(G)$ の構造を解析している。

• より一般には、Green [Gr2] は、G が連結局所コンパクト群のとき、$C^*(G)$ を任意の原始イデアルで割った剰余 C*-環は、単純なイデアル、すなわち $C^*(G)$ の単純 subquotient をもち、それは stable か、または有限次元行列環であることを示している。

さらに、Poguntke [Pg] は、G が連結リー群のとき、$C^*(G)$ を任意の原始イデアルで割った剰余 C*-環は、単純なイデアル、すなわち $C^*(G)$ の単純 subquotient をもち、それは、有限次元行列環か、C*-テンソル積 $\mathbb{K} \otimes C^*(\mathbb{Z}^n, \sigma)$ $(n \geq 0)$ に同型であることを証明している。ただし、$C^*(\mathbb{Z}^n, \sigma)$ は、非退化なコサイクルσをもつツイスト C*-群環である。また、σが非退化と、$C^*(\mathbb{Z}^n, \sigma)$ が単純は同値である。実際に、上の主定理の高次元

非可換トーラスは、適当なコサイクルσをとれば、次が成り立つ：

$$\mathfrak{A}_\Theta = C(\mathbb{T}^{n-1}) \rtimes \mathbb{Z} \cong C^*(\mathbb{Z}^n, \sigma).$$

特に、$n=2$ の場合は、

$$\mathfrak{A}_\theta = C(\mathbb{T}) \rtimes \mathbb{Z} \cong C^*(\mathbb{Z}^2, \sigma),$$

$$\sigma((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = e^{2\pi i\theta y_1 x_2} \quad (x_i, y_i) \in \mathbb{Z}^2 (1 \le i \le 2).$$

• また、Niels Pedersen [Pd] は、次のことを示している：G を連結リー群で、そのリー環が半単純リー環と、cocompact な radical をもつリー環の直和とすると、$C^*(G)$ の有限組成列 $\{\mathfrak{I}_j\}$ が存在して、各 subquotient $\mathfrak{I}_j/\mathfrak{I}_{j-1}$ は generalized liminary である。ただし、C*-環が I 型ならば、それが generalized liminary と liminary(=CCR) は同値である。注として、主定理とその系は、この Pedersen の結果の realization をあたえている。

(4) 応用

この章では、まず、stable rank と connected stable rank の定義と基本公式について述べる ([Rf1]). さらに、これらの基本公式と、上の主定理とその系を組み合わせて、リー半直積群 $\mathbb{C}^n \rtimes \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n \rtimes \mathbb{R}$ の C*-群環の stable rank と connected stable rank の評価式をあたえる。

$\mathfrak{A}$ を単位元を持つ C*-環とする。単位元がない C*-環の場合は、その単位元付加を考える。いま、$\mathfrak{A}$ の n 直和 $\mathfrak{A}^n$ の部分集合 $L_n(\mathfrak{A})$ を次で定義する：

$$L_n(\mathfrak{A}) = \{(a_i) \in \mathfrak{A}^n \mid \sum_{i=1}^n a_i a_i^* \text{が} \mathfrak{A} \text{で可逆}\}.$$

このとき、$\mathfrak{A}$ の stable rank, $\mathrm{sr}(\mathfrak{A})$ と connected stable rank, $\mathrm{csr}(\mathfrak{A})$ は、それぞれ次の性質を満たす最小の正整数 n で定義される：

$$\begin{cases} L_n(\mathfrak{A}) \text{ が } \mathfrak{A}^n \text{で稠密である。} \\ L_n(\mathfrak{A}) \text{ が連結である。} \end{cases}$$

注として、これらの ranks は、C*-環の同型不変量にはなっていない。一方、stable rank と connected stable rank の間には、次の関係が成り立つ：

$$\mathrm{csr}(\mathfrak{A}) \leq \mathrm{sr}(\mathfrak{A}) + 1.$$

X を局所コンパクト T_2空間とするとき、次がえられる：

$$\mathrm{sr}(C_0(X)) = [\dim X/2] + 1 := \dim_{\mathbb{C}} X.$$

ただし、$\dim X$ は、X の被覆次元で、$[\cdot]$ はガウス記号である。一方、

$$\mathrm{csr}(C_0(\mathbb{R}^n)) = \mathrm{csr}(C(S^n)) = \begin{cases} 2 & n = 1, \\ 1 & n = 2, \\ [(n+1)/2] + 1 & n \geq 3 \end{cases}$$

ただし、S^nは、n 次元球面である。ちなみに、この証明には、S^nのホモトピー理論の古典的な結果を用いる ([Sh]).

C^*-環の完全列 $0 \to \mathfrak{I} \to \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}/\mathfrak{I} \to 0$ が与えられたとき、次がなりたつ：

$$\mathrm{sr}(\mathfrak{I}) \vee \mathrm{sr}(\mathfrak{A}/\mathfrak{I}) \leq \mathrm{sr}(\mathfrak{A}) \leq \mathrm{sr}(\mathfrak{I}) \vee \mathrm{sr}(\mathfrak{A}/\mathfrak{I}) \vee \mathrm{csr}(\mathfrak{A}/\mathfrak{I}),$$

$$\mathrm{csr}(\mathfrak{A}) \leq \mathrm{csr}(\mathfrak{I}) \vee \mathrm{csr}(\mathfrak{A}/\mathfrak{I}).$$

ただし、$\vee$は最大値をあらわす。

また、C*-環 $\mathfrak{A}$ と $\mathbb{K}$ のテンソル積については、次がいえる：

$$\mathrm{sr}(\mathfrak{A} \otimes \mathbb{K}) = 2 \wedge \mathrm{sr}(\mathfrak{A}), \quad \mathrm{csr}(\mathfrak{A} \otimes \mathbb{K}) \leq 2 \wedge \mathrm{csr}(\mathfrak{A}).$$

ただし、$\wedge$は最小値をあらわす ([Sh], [Ns]).

さらに、次の二つの結果が知られている：

- G が単連結可解リー群のとき、$\mathrm{sr}(C^*(G)) = 1$ と $G \cong \mathbb{R}$ は同値である ([ST2]).
- C*-環 $\mathfrak{A}$ の K_1群が自明でないならば、$\mathrm{csr}(\mathfrak{A}) \geq 2$ ([Hs]).

以上の基本結果と主定理を組み合わせると、次がなりたつ：

定理 4.1. リー半直積 $G=\mathbb{C}^n \rtimes \mathbb{R}$ に対して、

$$2 \vee \dim_{\mathbb{C}} \hat{G}_1 \leq \mathrm{sr}(C^*(G)) \leq \dim_{\mathbb{C}} \hat{G}_1 + 1,$$

$$2 \leq \mathrm{csr}(C^*(G)) \leq \dim_{\mathbb{C}} \hat{G}_1 + 1.$$

特に、$\mathbb{C}^n$の$\hat{\alpha}$による不動点が原点だけならば、つまり、$\dim \hat{G}_1 = 1$ ならば、

$$\mathrm{sr}(C^*(G)) = 2, \quad \mathrm{csr}(C^*(G)) = 2.$$

注. G が Mautner 群の場合は、$\dim \hat{G}_1 = 1$.

主定理の系からは、次が従う：

定理 4.2. リー半直積 $G=\mathbb{R}^n \rtimes \mathbb{R}$ に対して、

$$\begin{cases} \mathrm{sr}(C^*(G)) = 2 \vee \dim_{\mathbb{C}} \hat{G}_1 & \textit{if } \dim \hat{G}_1 \textit{ is even,} \\ 2 \vee \dim_{\mathbb{C}} \hat{G}_1 \leq \mathrm{sr}(C^*(G)) \leq \dim_{\mathbb{C}} \hat{G}_1 + 1 & \textit{if } \dim \hat{G}_1 \textit{ is odd.} \end{cases}$$

$$\mathrm{csr}(C^*(G)) \leq 2 \vee \mathrm{csr}(C_0(\hat{G}_1)) = [(\dim_{\mathbb{C}} \hat{G}_1 + 1)/2] + 1.$$

注意. 上の二つの定理の違いは、定理 4.1 の場合は、G の次元が奇数で、かつ$\hat{G}_1$の次元も奇数になることによる。

References

[Bl] B. Blackadar, *K-Theory for Operator Algebras*, Springer-Verlag, 1986.

[Cn] A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, 1994.

[Dx] J. Dixmier, *C^*-algebras*, North-Holland, 1977.

[EL] G.A. Elliott and Q. Lin, *Cut-down method in the inductive limit decomposition of noncommutative tori,* II : *the degenerate case*, Operator Algebras and Their Applications, Fields Inst. Comm. **13** (1997), 91–123.

[Gr1] P. Green, *C^*-algebras of transformation groups with smooth orbit space*, Pacific. J. Math. **72** (1977), 71–97.

[Gr2] ———, *The structure of imprimitivity algebras*, J. Funct. Anal. **36** (1980), 88–104.

[Hs] N.E. Hassan, *Rangs stables de certaines extensions*, J. London Math. Soc. **52** (1995), 605–624.

[MS] C.C. Moore and C. Schochet, *Global Analysis on Foliated Spaces*, Springer-Verlag, 1988.

[Ns] V. Nistor, *Stable range for tensor products of extensions of $\mathcal{K}$ by $C(X)$*, J. Operator Theory **16** (1986), 387–396.

[Pd] N.V. Pedersen, *Composition series of $C^*(G)$ and $C_c^\infty(G)$, where G is a solvable Lie group*, Invent. math. **82** (1985), 191–206.

[Pg] D. Poguntke, *Simple quotients of group C^*-algebras for two step nilpotent groups and connected Lie groups*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **16** (1983), 151–172.

[Pw] S.C. Power, *Simplicity of C^*-algebras of minimal dynamical systems*, J. London Math. Soc. **18** (1978), 534–538.

[Rf1] M.A. Rieffel, *Dimension and stable rank in the K-theory of C^*-algebras*, Proc. London Math. Soc. **46** (1983), 301–333.

[Rf2] ———, *Projective modules over higher-dimensional non-commutative tori*, Can. J. Math. **XL** (1988), 257–338.

[Rs] J. Rosenberg, *The C^*-algebras of some real and p-adic solvable groups*, Pacific. J. Math. Soc. **65** (1976), 175–192.

[Sh] A.J-L. Sheu, *A cancellation theorem for projective modules over the group C^*-algebras of certain nilpotent Lie groups*, Canad. J. Math. **39** (1987), 365–427.

[ST1] T. Sudo and H. Takai, *Stable rank of the C^*-algebras of nilpotent Lie groups*, Internat. J. Math. **6** (1995), 439–446.

[ST2] ______, *Stable rank of the C^*-algebras of solvable Lie groups of type I*, J. Operator Theory **38** (1997), 67–86.

[Wg] X. Wang, *The C^*-algebras of a class of solvable Lie groups*, Pitman Research Notes 199, 1989.

[Zp] D.N. Z'ep, *Structure of the group C^*-algebra of the group of affine transformations of a straight line*, Funct. Anal. Appl. **9** (1975), 58–60.

903-0213 沖縄県西原町千原一番地　琉球大学理学部数理科学科
E-mail address: sudo@math.u-ryukyu.ac.jp